..:: O Princípio da Indução Finita.

O ***princípio da indução finita*** é um método matemático poderoso de demonstração dedutiva que permite ao matemático concluir se uma indução ou proposição matemática é completamente verdadeira ou falsa. Mas, vale ressaltar, não é o único. Esse método é basicamente utilizado quando as proposições estão inseridas no conjunto dos números naturais.

Por exemplo, consideremos a relação $p = 2^{2^n} + 1, \textit{ para } n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$. O grande matemático *Pierre de Fermat* (1601 – 1665) acreditou que essa fórmula geraria apenas números primos para todo e qualquer $n \in \mathbb{N}$. Mas *Euler* (1707 – 1783), outro fantástico matemático, provou que essa indução é falsa para $n = 5$. Vejamos:

$n = 0 \Rightarrow p = 2^{2^0} + 1 = 3$

$n = 1 \Rightarrow p = 2^{2^1} + 1 = 5$

$n = 2 \Rightarrow p = 2^{2^2} + 1 = 17$

$n = 3 \Rightarrow p = 2^{2^3} + 1 = 257$

$n = 4 \Rightarrow p = 2^{2^4} + 1 = 65.537$

que são todos números primos. Até aí, tudo bem. Mas, para $n = 5$, temos:

$n = 5 \Rightarrow p = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \text{ x } 6.700.417$, que constitui um número divisível por 641. Portanto, Euler está certo. Fermat, infelizmente, errado.

O método que aplicamos anteriormente é conhecido como indução vulgar, dada sua parcialidade.

Por isso, foi preciso desenvolver um método para que os matemáticos não caíssem em erros como este. E o método foi o *Princípio da Indução Finita*.

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais ou inteiros positivos. Seja $P(n)$ uma propriedade ou proposição verdadeira ou falsa aplicável aos números naturais. Se:

i) $P(1)$ (para $n = 1$) é verdadeira e,

ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ também é verdadeira, então:

a proposição $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Costuma-se generalizar o princípio da indução em i. Se:

i) $P(r)$ (para $r \in \mathbb{N}$) é verdadeira e,

ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ também é verdadeira, então:

a proposição $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vejamos alguns exemplos:

1) Consideremos a igualdade:

$$1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Poderíamos atribuir valores a n de tal maneira a se verificar a proposição:

$n=1 \Rightarrow 1=\frac{1(1+1)}{2}$

$n=2 \Rightarrow 1+2=\frac{2(2+1)}{2}$

$n=3 \Rightarrow 1+2+3=\frac{3(3+1)}{2}$

$n=4 \Rightarrow 1+2+3+4=\frac{4(4+1)}{2}$

...

$n=10 \Rightarrow 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=\frac{10(10+1)}{2}$

...

Parece que essa indução é realmente válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, como podemos provar isso de maneira convincente e irrefutável? Ou, como podemos provar que essa indução será realmente válida sempre?

Simples, utilizando o princípio da indução. Observe:

i) para $n=1$, temos $1=\frac{1(1+1)}{2}$. (verdadeiro)

ii) para $n=k$, temos $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$ (hipótese)

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Assim, para $n=k+1$, devemos ter:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ (tese)}$$

Partindo da hipótese, somaremos $k+1$ a ambos os membros da igualdade:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Que constitui $P(k+1)$.

Logo, a indução é valida $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Voltemos agora para $p = 2^{2^n} + 1;\ n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, que seriam, por indução, todos números primos - os conhecidos *primos de Fermat*. Não se sabe ao certo se os primos de Fermat são finitos. Têm-se conhecimento de que os números de ordem 5 até 23 são igualmente compostos. Existe um teorema que diz: *"Um primo de Fermat é igual ao produto de todos os anteriores mais 2"*. Vamos tentar provar tal afirmativa.

Seja $p_n = 2^{2^n} + 1;\ n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ um primo de Fermat.

De acordo com o teorema;

$$p_0 . p_1 . p_2 ... p_{n-2} . p_{n-1} + 2 = p_n$$

i) Para $n = 1$, temos $p_0 + 2 = p_1 \Rightarrow 2^{2^0} + 2 = 2^{2^1} \Rightarrow 4 = 4$ (verdadeiro)

ii) Para $n = k$, temos $p_0 . p_1 . p_2 ... p_{k-2} . p_{k-1} + 2 = p_k$ (hipótese)

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$; para $n = k+1$, devemos ter:

$$p_0 . p_1 . p_2 ... p_{k-2} . p_{k-1} . p_k + 2 = p_{k+1} \text{ (tese)}$$

Sabemos, da hipótese, que:

$p_0 . p_1 . p_2 ... p_{k-2} . p_{k-1} + 2 = p_k$

Logo,

$p_0 . p_1 . p_2 ... p_{k-2} . p_{k-1} = p_k - 2$

Substituindo na tese, obtemos:

$(p_k - 2)p_k + 2 = p_{k+1}$

$\left(2^{2^k} + 1 - 2\right)\left(2^{2^k} + 1\right) + 2 = p_{k+1}$

$\left(2^{2^k} - 1\right)\left(2^{2^k} + 1\right) + 2 = p_{k+1}$

$\left(2^{2^k}\right)^2 - 1^2 + 2 = p_{k+1}$

$2^{2.2^k} + 1 = p_{k+1}$

$2^{2^{k+1}} + 1 = p_{k+1}$

$p_{k+1} = p_{k+1}$

Logo, o teorema é válido $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Vamos provar que $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$, temos que $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} \Rightarrow 1 = 1$ (verdadeiro)

ii) Para $n = k$, temos que $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (hipótese)

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$; para $n = k+1$, devemos ter:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \text{ (tese)}$$

Demonstração:

Partindo da hipótese, somaremos $(k+1)^2$ a ambos os membros da igualdade:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k^2+k)(2k+1) + 6k^2 + 12k + 6}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{2k^3 + k^2 + 2k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

O polinômio $2k^3 + 9k^2 + 13k + 6$ *pode ser fatorado na forma*:

$2k^3 + 9k^2 + 13k + 6 = (k+1)(k+2)(2k+3)$

Logo,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Que constitui $P(k+1)$.

Assim, a indução é válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) Seja a desigualdade $1^3+2^3+3^3+...+n^3>\frac{n^4}{4}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Vamos demonstrá-la.

i) Para $n=1$, temos que $1^3>\frac{1^4}{4} \Rightarrow 1>\frac{1}{4}$ (verdadeiro)

ii) Para $n=k$, temos que $1^3+2^3+3^3+...+k^3>\frac{k^4}{4}$ (hipótese)

$P(k)\Rightarrow P(k+1)$; para $n=k+1$, devemos ter:

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3>\frac{(k+1)^4}{4} \quad \text{(tese)}$$

Demonstração:

Através da hipótese, sabemos que $1^3+2^3+3^3+...+k^3>\frac{k^4}{4}$.

Somando $(k+1)^3$ a ambos os membros, obtemos:

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3>\frac{k^4}{4}+(k+1)^3$$
$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3>\frac{k^4+4(k+1)^3}{4}$$
$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3>\frac{k^4+4(k+1)(k^2+2k+1)}{4}$$
$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3>\frac{k^4+4(k^3+2k^2+k+k^2+2k+1)}{4}$$
$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3>\frac{k^4+4(k^3+3k^2+3k+1)}{4}$$
$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3>\frac{k^4+4k^3+12k^2+12k+4}{4}$$

Desenvolvendo $(k+1)^4$, obtemos:

$$(k+1)^4=(k+1)^2(k+1)^2=(k^2+2k+1)(k^2+2k+1)$$
$$(k+1)^4=k^4+2k^3+k^2+2k^3+4k^2+2k+k^2+2k+1$$
$$(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1$$

Podemos, então, fazer:

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3 > \frac{k^4+4k^3+12k^2+12k+4}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3 > \frac{k^4+4k^3+6k^2+4k+1+(6k^2+8k+3)}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3 > \frac{(k+1)^4+6k^2+8k+3}{4}$$

Como $6k^2+8k+3 \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, podemos descartá-lo. Temos a tese:

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3 > \frac{(k+1)^4}{4}$$

Assim, a indução é válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

5) Mostrar que n^3+2n é divisível por 3.

i) Para $n=1$, temos que $1^3+2.1=3$, que é divisível por 3 (verdadeiro)

ii) Para $n=k$, temos que k^3+2k é divisível por 3 (hipótese)

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$; para $n=k+1$, devemos ter:

$$(k+1)^3+2(k+1) \text{ (tese)}$$

Demonstração:

Vamos desenvolver a tese, de maneira que:

$$(k+1)^3+2(k+1) = k^3+3k^2+3k+1+2k+2 = k^3+2k+3(k^2+k+1)$$

Sabemos que k^3+2k é divisível por 3 (por hipótese). Temos que $3(k^2+k+1)$ também o é.

Logo, a indução é válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

6) Mostrar que $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 6.

i) Para $n=1$, temos que $1(1+1)(1+2)=6$, que é divisível por 6 (verdadeiro)

ii) Para $n=k$, temos que $k(k+1)(k+2)$ é divisível por 6 (verdadeiro por hipótese)

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$; para $n=k+1$, devemos ter:

$$(k+1)(k+2)(k+3) \quad \text{(tese)}$$

$$(k+1)(k+2)(k+3) = k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2) = [k(k+1)(k+2)]+3(k+1)(k+2)$$

Observamos que o termo entre colchetes é a hipótese. O outro termo também é divisível por 6. Logo, a indução é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Podemos fazer ainda:

$$6 \mid k(k+1)(k+2) \Rightarrow k(k+1)(k+2) = 6q \quad \text{(por hipótese), e}$$

$$6 \mid (k+1)(k+2)(k+3) \Rightarrow (k+1)(k+2)(k+3) = 6h \quad \text{(por tese).}$$

sendo q e h duas constantes quaisquer.

Logo,

$$(k+1)(k+2) = \frac{6q}{k} \quad \text{e} \quad (k+1)(k+2) = \frac{6h}{k+3}.$$

Então, podemos fazer :

$$\frac{6q}{k} = \frac{6h}{k+3} \Rightarrow \frac{q}{k} = \frac{h}{k+3} \Rightarrow q(k+3) = hk \Rightarrow q = \frac{hk}{k+3}$$

$$k(k+1)(k+2) = 6q \Rightarrow k(k+1)(k+2) = 6\left(\frac{hk}{k+3}\right) \Rightarrow (k+1)(k+2)(k+3) = 6h \ \ (tese)$$

.::. Está demonstrado.

7) Vamos demonstrar agora a seguinte desigualdade, proposta pelo matemático *Jacques Bernoulli* (1654 – 1705).

"Quailquer que seja o número $x \geq -1$ e o número inteiro $n \geq 1$, vale a seguinte desigualdade:

$$(1+x)^n \geq 1+nx\text{"}$$

Temos que se $x \geq 0$, essa desigualdade segue a fórmula binomial, ou seja:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+...+x^n \Rightarrow (1+x)^n > 1+nx$$

Vamos generalizar a demonstração, para $x \geq -1$.

i) Para $n=1$, temos que $(1+x)^1 \geq 1+1.x \Rightarrow 1+x = 1+x$ (verdadeiro)

ii) Para $n=k$, temos: $(1+x)^k \geq 1+kx$.

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$; para $n=k+1$, devemos ter:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x \ \ \text{(tese)}$$

Demonstração:

Multipliquemos ambos os membros da hipótese por $1+x$.

$$(1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) \Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+kx+x+kx^2 \Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2$$

Como $kx^2 \geq 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{N}$, podemos desprezar este termo, obtendo:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$$

Logo, a indução é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Publicado por Rodrigo R. Gonçalez – 04/12/2007

8) Vamos demonstrar a validade da expansão binomial $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$.

i) Para $n=1$, temos que $(a+b)^1 = \sum_{r=0}^{1} \binom{n}{r} a^{1-r} b^r \Rightarrow a+b = a+b$ (verdadeiro)

ii) Para $n=k$, temos que $(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^r$ (hipótese)

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$; para $n=k+1$, devemos ter:

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} a^{k+1-r} b^r \quad \text{(tese)}$$

Demonstração:

Partindo da hipótese, vamos multiplicar $(a+b)$ a ambos os membros da igualdade:

$$(a+b)(a+b)^k = (a+b)\left(\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^r \right)$$

$$(a+b)^{k+1} = a.\left(\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^r \right) + b.\left(\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^r \right)$$

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r+1} b^r + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r+1}$$

Sabemos que:

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r+1} b^r = \binom{k}{0} a^{k+1} b^0 + \binom{k}{1} a^k b + \ldots + \binom{k}{k} a^1 b^k = a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r+1} b^r \qquad e$$

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r+1} = \binom{k}{0} a^k b^1 + \binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1} a^1 b^k + \binom{k}{k} a^0 b^{k+1} = b^{k+1} + \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r+1}$$

Podemos, então, fazer:

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r+1} b^r + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r+1} b^r + \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r+1} + b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r+1} b^r + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r-1} a^{k-r+1} b^r$$

Observe que:

$$\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1}=\binom{k}{0}a^{k}b^{1}+\binom{k}{1}a^{k-1}b^{2}+\ldots+\binom{k}{k-2}a^{2}b^{k-1}+\binom{k}{k-1}a^{1}b^{k}$$

$$\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r-1}a^{k-r+1}b^{r}=\binom{k}{0}a^{k}b^{1}+\binom{k}{1}a^{k-1}b^{2}+\ldots+\binom{k}{k-2}a^{2}b^{k-1}+\binom{k}{k-1}a^{1}b^{k}$$

Logo,

$$\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1}=\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r-1}a^{k-r+1}b^{r}$$

Continuando com o desenvolvimento,

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+b^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r+1}b^{r}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r-1}a^{k-r+1}b^{r}$$

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+b^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\left[\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}\right]a^{k-r+1}b^{r}$$

Temos, agora, que:

$$\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}=\frac{k!}{r!(k-r)!}+\frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!}$$

$$\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}=\frac{k!}{r(r-1)!(k-r)!}+\frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)(k-r)!}$$

$$\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}=\frac{(k-r+1).k!}{r(r-1)!(k-r+1)(k-r)!}+\frac{r.k!}{r(r-1)!(k-r+1)(k-r)!}$$

$$\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}=\frac{(k+1)k!}{r(r-1)!(k-r+1)(k-r)!}$$

$$\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}=\frac{(k+1)!}{r!(k-r+1)!}$$

$$\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}=\binom{k+1}{r}$$

Assim,

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+b^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k+1}{r}a^{k-r+1}b^{r}$$

$$(a+b)^{k+1}=\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a^{k-r+1}b^{r}$$

Que constitui $P(k+1)$.

Logo, a indução é verdadeira $\forall n\in\mathbb{N}$.